

**Список литературы:** 1. Тесленко А.А. Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 2. Тесленко А.А. Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 3. Тесленко А.А. Автоматизация пьезооптических измерений // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 4. Тесленко А.А. Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 32. – С. 169-171. 5. Тесленко А.А. Определение точности метода фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 167-170. 6. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др. / Заводская лаборатория. – 1993. – Т. 59, № 2. – С. 64-66. 7. Тесленко А.А. Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков. 1991. – 22 с. 8. Тесленко А.А. / Заводская лаборатория 2. – 1998. – Т. 64, № 8. – С. 42-44. 9. Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В. / Функциональные материалы 2. – 1995. – № 4. – С. 543.  
Поступила в редакцию 11.09.2009

УДК 539.3

**В.А. ФЕДОРОВ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;  
**С.В. РАДИОНОВА**, инж.; НТУ «ХПИ»

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И DELPHI-ПРОЕКТ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОЧНОСТИ ЗАРЯДА РДТТ ПРИ ЕГО ОХЛАЖДЕНИИ**

В статті викладено математичну модель напружено-деформованого стану і паливного заряду ракетного двигуна твердого палива, а також короткий опис відповідного інтерактивного програмного продукту, розробленого в середовищі Delphi.

The mathematical model of the tensely-deformed state and strength of fuel charge of rocket engine of hard fuel, and also short description of the proper interactive programmatic product developed in the medium of Delphi, is expounded in the article.

Ракетные двигатели твердого топлива (РДТТ) применяются в различных областях техники. Вопросы прочности при их проектировании особенно актуальны, поскольку высокая энергоемкость и неуправляемый режим сгорания топливного заряда при разрушениях РДТТ приводят к серьезным авариям. Особенно опасны для прочности РДТТ условия глубокого охлаждения [1].

Наиболее распространенными являются РДТТ с трубчатыми скрепленными зарядами. В книге [1] изложена методика расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности такого заряда, заключенного в металлический корпус. Однако существует практическая необходимость разработки более совершенной математической модели, учитывающей наличие между зарядом и корпусом защитно-крепящего слоя, а также соответствующе-

го программного приложения, позволяющего в интерактивном режиме оценивать НДС и прочность РДТТ.

**1. Постановка задачи.** Решается задача определения температурных напряжений и прочности скрепленного заряда РДТТ в условиях его охлаждения.

Рассматривается РДТТ с трубчатым топливным зарядом, защитно-крепящим слоем и металлическим корпусом [1-3]. Размеры следующие:  $a$  и  $b$  – внутренний и внешний радиус топливного заряда,  $h_z$  – толщина защитно-крепящего слоя,  $h_m$  – толщина металлического корпуса.

Известны термомеханические свойства топливного заряда:  $E_z$  – модуль упругости;  $\nu_z$  – коэффициент Пуассона;  $\sigma_{bz}$  – предел прочности на растяжение;

Термомеханические свойства защитно-крепящего слоя:  $E_s$  – модуль упругости;  $\nu_s$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha_s$  – коэффициенты линейного температурного расширения;  $\sigma_{bs}$  – предел прочности на растяжение.

Термоупругие свойства металлического корпуса:  $E_m$  – модуль упругости;  $\nu_m$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha_m$  – коэффициенты линейного температурного расширения.

Кроме того, заданы:  $\sigma_{azs}$  – прочность адгезии материалов топливного заряда и защитно-крепящего слоя.

Нагружение двигателя заключается в его охлаждении от температуры хранения до низкой температуры. Изменение температуры внешней среды –  $\Delta T$ .

Необходимо разработать математическую модель, алгоритм и Delphi-программу расчета температурных напряжений в РДТТ и проверить прочность заряда и его адгезии с корпусом.

## **2 Математическая модель.**

2.1 Общие гипотезы заимствуются из работы [1]:

1) температурное и силовое нагружение РДТТ осесимметрично и не зависит от продольной координаты  $x$ ;

2) система корпус-заряд находится в условиях обобщенной плоской деформации (неизвестна продольная деформация  $\varepsilon_x = \text{const}$  при отсутствующей продольной силе);

3) влиянием концевых эффектов пренебрегается.

В данной статье топливный заряд рассматривается как толстостенная труба, а защитно-крепящий слой и металлический корпус – как тонкие оболочки.

### **2.2 Механические свойства отдельных слоев корпуса РДТТ.**

В общем случае корпус РДТТ является трехслойной тонкой упругой оболочкой. Каждый слой деформируется в соответствии с обобщенным законом Гука – Дюамеля – Неймана для двухосного напряженного состояния ( $\sigma_r = 0$ ):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_t + \alpha_1\Delta T; \\ \varepsilon_t &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_t + \alpha_2\Delta T.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_t$  – продольная и окружная деформации,  $\sigma_x$  и  $\sigma_t$  – продольное и окружное напряжения,  $\Delta T$  – изменение температуры,  $a_{ij}$  – коэффициенты податливости,  $\alpha_i$  – коэффициенты температурной деформации.

Для защитно-крепящего и металлического слоев

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{\nu}{E}; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (2)$$

После обращения закон (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_t - \beta_1\Delta T; \\ \sigma_t &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_t - \beta_2\Delta T, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$c_{11} = \frac{a_{22}}{\Delta}; \quad c_{22} = \frac{a_{11}}{\Delta}; \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{a_{12}}{\Delta} = -\frac{a_{21}}{\Delta}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\alpha_1 a_{22} - \alpha_2 a_{12}}{\Delta}; \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2 a_{11} - \alpha_1 a_{21}}{\Delta}; \\ \Delta &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения (3) записываются в матричном виде

$$\underline{\sigma} = \underline{c}\underline{\varepsilon} - \underline{\beta}T, \quad (6)$$

где  $\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_t)^T$ ,  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_t)^T$  – матрицы-столбцы напряжений и деформаций,  $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$  – столбец коэффициентов температурных напряжений,  $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  – матрица жесткости материала.

### 2.3 Механические свойства корпуса РДТГ в целом

При исследовании тонких оболочек удобно использовать не напряжения, а погонные внутренние силы, которые выражаются через напряжения:

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_t \end{pmatrix} = \int_b^R (\underline{\sigma}) dr, \quad (7)$$

где

$$R = b + h_s + h_m. \quad (8)$$

После подстановки в равенство (7) закона (6) и интегрирования в пределах каждого слоя получим

$$\underline{N} = \int_b^R \underline{c}\underline{\varepsilon} dr - \left( \int_b^R \underline{\beta} dr \right) T = \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \int_b^{b+h_s} \underline{c}^{(s)} \underline{\varepsilon} dr + \int_{b+h_s}^{b+h_s+h_m} \underline{c}^{(m)} \underline{\varepsilon} dr - \int_b^{b+h_s} \underline{\beta}^{(s)} dr \Delta T - \int_{b+h_s}^{b+h_s+h_m} \underline{\beta}^{(m)} dr \Delta T = \\ &= \underline{c}^{(s)} \int_b^{b+h_s} \underline{\varepsilon} dr + \underline{c}^{(m)} \int_{b+h_s}^{b+h_s+h_m} \underline{\varepsilon} dr - \underline{\beta}^{(s)} h_s \Delta T - \underline{\beta}^{(m)} h_m \Delta T. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив в зависимость (9) геометрическое соотношение

$$\varepsilon_t = \frac{W}{r} \quad (11)$$

и, считая, что в тонких оболочках защитно-крепящего слоя

$$r = \text{const} = R_s = b + h_s/2, \quad (12)$$

металлического слоя

$$r = \text{const} = R_m = b + h_m/2, \quad (13)$$

и радиальное перемещение в слое корпуса равны

$$W_s = W_m = W_c = W_k, \quad (14)$$

получим физические соотношения в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Delta T. \quad (15)$$

Здесь коэффициенты жесткости корпуса РДТТ

$$\begin{aligned} B_{11} &= c_{11}^{(s)} h_s + c_{11}^{(m)} h_m; \\ B_{12} &= c_{12}^{(s)} h_s + c_{12}^{(m)} h_m; \\ B_{21} &= c_{21}^{(s)} h_s + c_{21}^{(m)} h_m; \\ B_{22} &= c_{22}^{(s)} h_s + c_{22}^{(m)} h_m. \end{aligned} \quad (16)$$

и коэффициенты температурных усилий корпуса РДТТ

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \beta_1^{(s)} h_s + \beta_1^{(m)} h_m; \\ \gamma_2 &= \beta_2^{(s)} h_s + \beta_2^{(m)} h_m. \end{aligned} \quad (17)$$

Физические соотношения для корпуса РДТТ (15) после их обращения принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \Delta T, \quad (18)$$

где коэффициенты податливости корпуса РДТТ

$$s_{11} = \frac{B_{22}}{\Delta}; \quad s_{22} = \frac{B_{11}}{\Delta}; \quad s_{12} = \frac{B_{21}}{\Delta}; \quad s_{21} = \frac{B_{12}}{\Delta}; \quad (19)$$

и коэффициенты температурного расширения

$$\delta_1 = \frac{\gamma_1 B_{22} - \gamma_2 B_{12}}{\Delta}; \quad \delta_2 = \frac{\gamma_2 B_{11} - \gamma_1 B_{21}}{\Delta}; \quad (20)$$

$$\Delta = B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21}. \quad (21)$$

## 2.4 Математическая модель термоупругого деформирования РДТТ.

Математической моделью заряда является обобщение задачи Ляме о толстостенном цилиндре на случай термосилового нагружения при наличии продольной деформации  $\dot{\varepsilon}_x \neq 0$ .

Соотношения термоупругости [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_x)] + \alpha \Delta T; \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu(\sigma_x + \sigma_r)] + \alpha \Delta T; \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] + \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (22)$$

после исключения с помощью последнего уравнения

$$\sigma_x = v(\delta_r + \delta_t) - E\alpha\Delta T + E\varepsilon_x \quad (23)$$

принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_*}(\delta_r - v_*\sigma)_t + \alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x; \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E_*}(\delta_t - v_*\sigma_r) + \alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$E_* = \frac{E}{1-v^2}; \quad v_* = \frac{v}{1-v}; \quad \alpha_* = (1+v)\alpha. \quad (25)$$

Решив уравнения (24) относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_*}{1-v_*^2}[\varepsilon_r + v_*\varepsilon_t - (1+v_*)\alpha_*\Delta T + (1+v_*)v\varepsilon_x]; \\ \sigma_t &= \frac{E_*}{1-v_*^2}[\varepsilon_t + v_*\varepsilon_r - (1+v_*)\alpha_*\Delta T + (1+v_*)v\varepsilon_x]. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставив в дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (27)$$

физические соотношения (24) геометрические соотношения

$$\varepsilon_r = \frac{dW}{dr}; \quad \varepsilon_t = \frac{W}{r}, \quad (28)$$

где  $W$  – радиальные перемещения, получим разрешающее уравнение

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{dW}{dr} - \frac{W}{r^2} = (1+v_*) \left( \alpha_* \frac{d\Delta T}{dr} - v \frac{d^2x}{dr} \right), \quad (29)$$

которое имеет общее решение

$$W = (1+v_*) \frac{1}{r} \int_a^r (\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x) r dr + c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (30)$$

и для напряжений из (26)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E_x}{r^2} \int_a^r (\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x) r dr + \frac{E_*}{1-v_*^2} [c_1 (1+v_*) - c_2 (1+v_*) \frac{1}{r^2}]; \\ \sigma_t &= -\frac{E_x}{r^2} \int_a^r (\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x) r dr - E_*(\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x) + \frac{E_*}{1-v_*^2} [c_1 (1+v_*) - c_2 (1-v_*) \frac{1}{r^2}], \end{aligned} \quad (31)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – неопределенные константы интегрирования.

При равномерном нагреве  $\Delta T = \text{const}$  и общее решение принимает вид

$$\begin{aligned} W &= (1+v_*)(\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x) \frac{r^2 - a^2}{2r} + c_1 r + \frac{c_2}{r}; \\ \sigma_r &= -E_*(\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x) \frac{r^2 - a^2}{2r^2} + \frac{E_*}{1-v_*^2} [c_1 (1+v_*) - c_2 (1-v_*) \frac{1}{r^2}]; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\sigma_i = E_* (\alpha_* \Delta T - v \varepsilon_x) \left( \frac{r^2 - a^2}{2r^2} - 1 \right) + \frac{E_*}{1 - v_*^2} [c_1 (1 + v_*) + c_2 (1 - v_*) \frac{1}{r^2}]$$

и, согласно (23)

$$\sigma_x = (v^2 E_* + E) \varepsilon_x + \frac{2vE_*}{1 - v_*^2} c_1 - (vE_* \alpha_* + E \alpha) \Delta T.$$

В формулах, описывающих напряженно-деформированное состояние корпуса и заряда РДТТ, неизвестные  $c_1$ ,  $c_2$  и  $\varepsilon_x$  должны определяться из граничного условия для заряда при  $r = a$ , условия сопряжения заряда с корпусом при  $r = b$  и условия равновесия системы заряд-корпус.

**3 Решение задачи охлаждения РДТТ.** Решение задачи о соответствующем изменении напряженно-деформированного состояния описывается общим решением для корпуса и заряда РДТТ с граничным условием отсутствия нагрузки на внутреннюю поверхность заряда

$$\sigma_r(r = a) = 0 \quad (33)$$

и условиями сопряжения заряда с корпусом РДТТ: условием равенства окружных деформаций и, соответственно, радиальных перемещений в заряде и в корпусе

$$\varepsilon_i^s(r = b) = \varepsilon_i^k, \quad (34)$$

условием равновесия корпуса под действием радиального давления заряда

$$\sigma_r(r = b) = -N_t/R_m \quad (35)$$

и условием равенства нулю равнодействующей внутренней осевой силы в РДТТ

$$2\pi R_m N_x + \pi(b^2 - a^2)\sigma_x = 0. \quad (36)$$

В после подстановки общих решений для заряда и физических соотношений для корпуса эти условия запишутся как система четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_i^k$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  позволяет после подстановки их в общее решение найти напряженное состояние заряда по формулам (32).

Для оценки прочности заряда и его сопряжения с корпусом необходимо вычислить запас прочности топливного заряда по критерию Мизеса:

$$k_z = \sigma_{bz} / \max \sigma_i, \quad (37)$$

где  $\max \sigma_i$  – максимальная интенсивность напряжений в топливном заряде а также запас прочности соединения заряд – корпус

$$k_{zk} = \sigma_{bzk} / \sigma_r(r = b), \quad (38)$$

где  $\sigma_{bzk}$  – прочность адгезии заряда с корпусом.

**4 Программа расчета НДС и прочности топливного заряда РДТТ.** Программа, разработанная в системе программирования Delphi, содержит две формы.

Главная форма (рис. 1) предназначена для ввода исходных данных и сохранения их вариантов. Основные ее элементы:

1) главное меню, позволяющее открыть ранее созданные, сохранить но-

вые варианты расчета, воспользоваться справкой по программе;

2) комментарий ко всему варианту расчета, идентифицирующий его среди других;

3) компоненты GroupBox с окнами редакторов для каждого материала, в которые вносятся

- маркировка материала;

- термомеханические свойства материалов слоев и свойства их адгезии;

4) компонент GroupBox с окнами редакторов для задания температур;

5) кнопка «Считать», которая инициирует расчет напряженно-деформированного состояния заряда и открытие формы с графиками результатов;

6) кнопка «Закончить», по которой происходит завершение работы программы.

Рисунок 1 – Главная форма для исходных данных

Основные элементы другой формы (рис. 2), предназначенной для вывода результатов расчета:

1) рисунок «Напряженное состояние заряда» с графиками напряжений;

2) рисунок «Запасы прочности» с графиками запасов прочности для заряда и для соединения заряд – корпус;

3) компонентами Label, через которые программа дает качественную оценку о прочном или непрочном состоянии ракеты;

4) кнопка «Закрыть», закрывающая модальную форму.

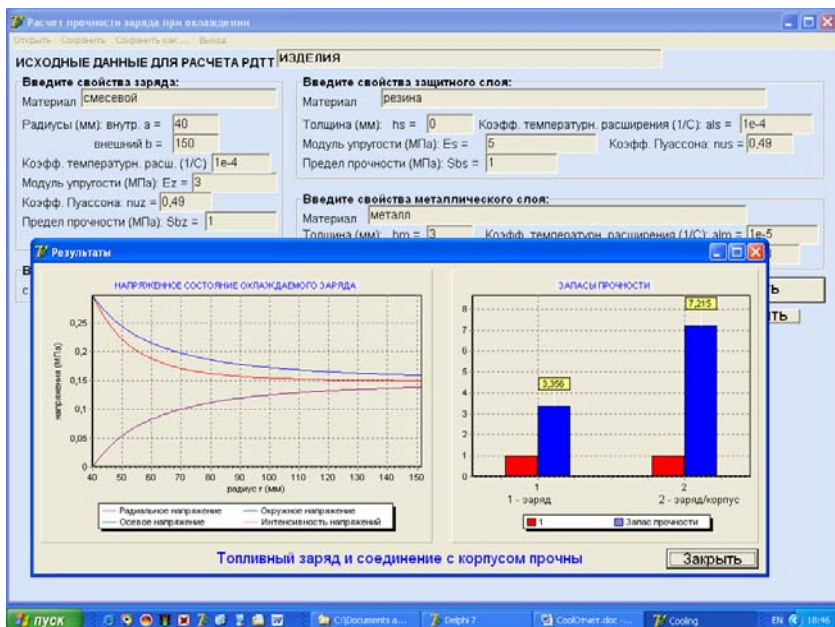


Рисунок 2 – Модальная форма для результатов расчета

**Список литературы:** 1. Фахрутдинов И.Х., Котельников А.В. Конструкция и проектирование ракетных двигателей твердого топлива. – М.: Машиностроение, 1987. – 328 с. 2. Конструкция и обработка РДТТ / А.М. Винницкий, В.Т. Волков, И.Г. Волковицкий и др. – М.: Машиностроение, 1980. – 230 с. 3. Абузов Д.И., Бобылев В.М. Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с. 4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

Поступила в редколлегию 25.09.2009

УДК 621.774.7

**В.Г. ФЕДОРЧЕНКО**, канд.техн.наук, доц., ДГМА, Краматорск;  
**С.В. ПОДЛЕСНЫЙ**, канд.техн.наук, доц., ДГМА, Краматорск;  
**А.Ю. ДЕНЬЩИКОВ**, асс., ДГМА

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ИНТЕРВАЛА ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ РАЗВАЛЬЦОВКЕ ТОНКОСТЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРУБ

Пропонуються залежності в графічній та аналітичній формах визначення температурного інтервалу пластичності з метою здобуття оптимальних енергосилових параметрів развальцовки тонкостінних труб довільного діаметру. Отримані аналітичні залежності показують задовільну збіжність з експериментальними даними, що приводяться в літературних джерелах.